

Design of Distributed Consensus Controller for Leader-Follower Singular Multi-Agent Systems in the Presence of Sensor Fault

Saeed Poormirzaei^{*}, Hamid Reza Ahmadzadeh^{**}, Masoud Shafiee^{***}

^{*}Master's student, Faculty of Electrical Engineering, Amirkabir University of Technology, Tehran

^{**}Ph.D. student, Faculty of Electrical Engineering, Amirkabir University of Technology, Tehran

^{***} Professor, Faculty of Electrical Engineering, Amirkabir University of Technology, Tehran

Abstract

In this paper, the problem of sensor fault estimation and designing of a distributed fault-tolerant controller is investigated to guarantee the leader-follower consensus for homogeneous singular multi-agent systems for the first time. First, a novel augmented model for the system is proposed. It is shown that the proposed model is regular and impulse-free unlike some similar research works. Based on this model, the state and sensor fault of the system are simultaneously estimated by designing a distributed singular observer. The proposed observer also has the ability to estimate time-varying sensor fault. Then, a distributed controller is designed to guarantee the leader-follower consensus using estimation of state and sensor fault. The sufficient conditions to ensure the stability of the observer dynamic and consensus dynamic are derived in terms of linear matrix inequalities (LMIs). The gains of observer and controller are computed by solving these conditions with MATLAB software. Finally, the validation and efficiency of the proposed control system for the leader-follower consensus of singular multi-agent systems exposed to sensor faults is illustrated by computer simulations. The simulation results show that the proposed control strategy dealing to the sensor fault in the singular multi-agent systems is effective.

Keywords: Multi-agent systems, Singular systems, Sensor fault estimation, Distributed Fault-tolerant Control.

طراحی کنترل کننده‌ی اجماع توزیع شده مبتنی بر رویت گر برای سیستم‌های چندعاملی سینگولار رهبر-پیرو در حضور عیب حسگر

سعید پورمیرزایی*، حمیدرضا احمدزاده**، مسعود شفیعی***

* دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی برق، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران

** دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی برق، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران

*** استاد، دانشکده مهندسی برق، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۰۳/۲۰ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۰۴/۲۲

نوع مقاله: پژوهشی

چکیده

در این مقاله برای نخستین بار، مسئله‌ی تخمین عیب حسگر و طراحی یک سیستم کنترل تحمل پذیر عیب توزیع شده به منظور اجماع رهبر-پیرو در سیستم‌های چندعاملی سینگولار همگن مورد بررسی قرار می‌گیرد. ابتدا، یک مدل الحاقی برای سیستم مورد مطالعه پیشنهاد می‌شود. نشان داده شده است که مدل الحاقی پیشنهاد شده در این مقاله بر خلاف برخی کارهای تحقیقاتی مشابه منظم و بدون ضربه است. بر اساس این مدل، متغیرهای حالت سیستم و عیب حسگر با طراحی یک رویت گر سینگولار توزیع شده به صورت هم‌زمان تخمین زده می‌شوند. رویت گر پیشنهاد شده قابلیت تخمین عیب‌های متغیر با زمان را نیز دارا می‌باشد. سپس، یک کنترل کننده‌ی توزیع شده به منظور اجماع رهبر-پیرو با استفاده از تخمین حالت‌های سیستم و تخمین عیب حسگر انجام شده؛ طراحی می‌شود. شروط کافی برای پایداری دینامیک خطای تخمین حالت و دینامیک خطای عدم توافق بر حسب ترم‌های نامساوی ماتریسی خطی بدست می‌آید و با حل آن‌ها، ماتریس‌های بهره رویت گر و کنترل کننده بدست می‌آیند. همه نامساوی‌های خطی ماتریسی موجود در مقاله با استفاده از نرم افزار MATLAB حل شده است. در نهایت، صحت سنجی و کارایی سیستم کنترل پیشنهادی به منظور اجماع رهبر-پیرو سیستم‌های چندعاملی سینگولار در معرض عیب حسگر با استفاده از شبیه سازی رایانه‌ای نشان داده می‌شود. نتایج شبیه سازی نشان می‌دهد که استراتژی کنترل پیشنهادی در مقابله با اثر عیب سنسور در سیستم‌های سینگولار چندعاملی کارا می‌باشد.

واژگان کلیدی: سیستم‌های چندعاملی، سیستم‌های سینگولار، تخمین عیب حسگر، کنترل کننده تحمل پذیر عیب توزیع شده

۱. مقدمه

به طور عمده رفتار پدیده‌ها و سیستم‌های فیزیکی با استفاده از مدل ریاضی مورد تحلیل و بررسی قرار می‌گیرد. مدل‌های ریاضی سیستم‌های کنترل بر اساس قوانین شناخته شده طبیعت طراحی شده‌اند. این قوانین به طور معمول با استفاده از قانون دوم نیوتون و یا قوانین کیرشهف^۱ و ... به صورت معادلات دیفرانسیلی-جبری^۲ (DAEs) توصیف می‌شود [۱]. در مهندسی کنترل، سیستم‌هایی که معادلات توصیف کننده آن شامل معادلات دیفرانسیلی و جبری است، سیستم‌های سینگولار نامیده می‌شوند. این دسته از سیستم‌ها با عناوینی مانند سیستم‌های توصیف گر، سیستم‌های نیمه حالت، سیستم‌های مقید و سیستم‌های دیفرانسیلی-جبری نیز شناخته می‌شوند. سیستم‌های سینگولار در زمینه‌های مختلف نظیر فرایندهای شیمیایی [۲]، سیستم‌های اقتصادی [۳]، مدارهای الکتریکی [۴]، سیستم‌های ابعاد وسیع [۵]، سیستم‌های مکانیکی مقید [۶]، مهندسی پزشکی و رباتیک [۷] و ... کاربرد دارند. در سال‌های اخیر، سیستم‌های چندعاملی با توجه به کاربردهای متعدد خود مانند کنترل آرایش بندی زبردیایی، حرکت دسته جمعی ربات‌های سیار و ... توجه جامعه‌ی مهندسی کنترل را به خود معطوف کرده است [۸].

از یک سو کاربردهای متنوع سیستم‌های چندعاملی و از سوی دیگر قابلیت مدل سازی جامع و دقیق توسط سیستم‌های سینگولار موجب شده است که مطالعه و تحلیل سیستم‌های سینگولار چندعاملی به موضوعی جذاب در جامعه‌ی مهندسی کنترل تبدیل شود. به نحوی که در سال‌های اخیر تعداد قابل توجهی از فعالیت‌های تحقیقاتی به این موضوع اختصاص یابد. به عنوان نمونه می‌توان به طراحی کنترل کننده‌های توزیع شده به منظور اجماع [۹]، دربرگیری [۱۰]، آرایش بندی [۱۱] و ... اشاره کرد.

از طرفی، از اوایل دهه‌ی ۷۰ میلادی بررسی عیب در سیستم‌ها همواره موضوعی داغ در نظریه سیستم‌های کنترل بوده است [۱۲]. بروز عیب در بسیاری از سیستم‌های دینامیکی امری اجتناب ناپذیر است و تأثیر منفی بر عملکرد سیستم می‌گذارد. لذا در طراحی سیستم‌های کنترل به نحوی که در برابر عیب‌ها تحمل پذیر باشند؛ ضروری است. یکی از مهم‌ترین رویکردهای طراحی کنترل تحمل پذیر عیب تخمین عیب‌ها و کاهش اثرات نامطلوب آن‌ها در عملکرد سیستم کنترل می‌باشد.

در این مقاله مسئله تشخیص و تخمین عیب حسگر در سیستم‌های چندعاملی سینگولار در نظر گرفته شده است. با توجه به بررسی‌های انجام شده توسط نویسندگان، مسئله تخمین عیب

حسگر در سیستم‌های چندعاملی سینگولار و طراحی کنترل کننده اجماع رهبر-پیرو برای این دسته از سیستم‌ها کاری جدید و انگیزه اصلی نگارش این مقاله است.

بخش‌های بعدی مقاله به شرح زیر سازماندهی و نگارش شده است. در بخش دوم، مروری بر پیشینه پژوهشی عیب در سیستم‌های چندعاملی سینگولار و موضوعات مرتبط انجام می‌شود. در بخش سوم، ابتدا نظریه گراف معرفی می‌شود. سپس، مسئله مورد مطالعه در این مقاله بیان و فرمول بندی می‌شود. بعد از آن، تعریف‌ها و مفاهیم اولیه‌ی لازم در حوزه سیستم‌های سینگولار و چندعاملی به صورت جداگانه شرح داده می‌شود. در ادامه فرض‌های در نظر گرفته شده در این مقاله بیان می‌شوند. در بخش چهارم، نتایج اصلی حاصل مطرح می‌شوند. در این بخش، ابتدا یک مدل الحاقی، به منظور تخمین هم‌زمان متغیرهای حالت و عیب حسگر پیشنهاد می‌شود. سپس رویت گر سینگولار توزیع شده مبتنی بر مدل الحاقی پیشنهادی طراحی می‌شود. بعد از آن، کنترل کننده اجماع رهبر-پیرو برای سیستم چندعاملی سینگولار با فرض در دسترس بودن متغیرهای حالت طراحی می‌شود. در نهایت اصل جدایی پذیری به منظور استفاده از تخمین حالت‌های سیستم در بازخورد حالت اثبات می‌شود که فرض در دسترس بودن حالت‌های سیستم را مرتفع می‌کند. در بخش پنجم، یک شبیه سازی رایانه‌ای به منظور نشان دادن کارایی روش پیشنهاد شده انجام می‌شود. نتیجه گیری و پیشنهاد برای پژوهش‌های آینده در بخش ششم مطرح می‌شود.

علائم ریاضی. میدان اعداد حقیقی و میدان اعداد مختلط به ترتیب به صورت \mathbb{R} و \mathbb{C} نمایش داده می‌شود. بردار $a \in \mathbb{R}^n$ و ماتریس مربعی $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ را در میدان اعداد حقیقی در نظر بگیرید. ترانهاده بردار با a^T و معکوس ماتریس با A^{-1} نمایش داده می‌شود. عملگر $\|a\|$ نشان دهنده نرم اقلیدسی بردار a می‌باشد. در رابطه با علامت ماتریس، عملگر $A < 0$ ($A \leq 0$) و $A > 0$ ($A \geq 0$) به ترتیب نشان دهنده منفی معین (منفی نیمه معین) و مثبت معین (مثبت نیمه معین) بودن ماتریس A است.

۱. مرور ادبیات

در این بخش، پژوهش‌های انجام شده روی موضوع مذکور مرور می‌شود. در زمینه‌ی تخمین و کنترل عیب حسگر سیستم‌های سینگولار، فعالیت‌های تحقیقاتی ارزشمندی صورت گرفته است. در [۱۳] یک رویت گر سینگولار به منظور تخمین مستقیم عیب حسگر در یک سیستم سینگولار در حضور اغتشاش طراحی شده است. تخمین و جداسازی عیب حسگر در مدل سینگولار از سیستم کنترل وضعیت ماهواره با وجود نویز فرایند و اندازه گیری با طراحی فیلتر کالمن تطبیقی در [۱۴] مورد بررسی

¹ Kirchhoff

² Differential-Algebraic Equations (DAEs)

قرار گرفته است. در [۱۵] یک رویه‌گر مودل‌گزشی زمان محدود به منظور کنترل سیستم سینگولار تأخیردار تحت عیب حسگر در نامعینی‌های غیرخطی طراحی شده است. یک رویه‌گر ورودی ناشناخته به منظور تخمین عیب حسگر در سیستم‌های سینگولار پارامتر متغیر تأخیردار در [۱۶] طراحی شده است. به منظور تخمین عیب حسگر در سیستم‌های سینگولار مرتبه‌کسری، یک رویه‌گر مرتبه‌کسری ورودی ناشناخته در [۱۷] طراحی شده است. در [۱۸] تخمین عیب حسگر در یک سیستم غیرسینگولار در نظر گرفته شده است. در این مقاله با تشکیل مدل الحاقی که سیستم استاندارد را به یک سیستم سینگولار تبدیل می‌کند و با طراحی رویه‌گر ورودی ناشناخته سینگولار، تخمین متغیرهای حالت سیستم و عیب حسگر به صورت هم‌زمان انجام شده است. در [۱۹] مسئله‌ی تخمین عیب عملگر و عیب حسگر سیستم‌های سینگولار سویچینگ مورد مطالعه قرار گرفته است. در این مقاله تخمین متغیرهای حالت، عیب عملگر، عیب حسگر و اغتشاش با تشکیل یک سیستم افزوده‌شده و طراحی یک رویه‌گر سینگولار به صورت هم‌زمان صورت می‌گیرد. در [۲۰] یک رویه‌گر مودل‌گزشی سینگولار به منظور تخمین متغیرهای حالت سیستم، عیب عملگر و عیب حسگر طراحی شده است. سیستم در نظر گرفته شده در این مقاله مربوط به کلاس خاصی از سیستم‌های غیرخطی غیرسینگولار و روش پیشنهادشده در نهایت به یک سیستم بخار اعمال شده است.

در سال‌های اخیر، پژوهش‌های متعدد و متنوعی در خصوص تشخیص و تخمین عیب در سیستم‌های چندعاملی استاندارد (غیرسینگولار) گزارش شده‌اند. در [۲۱] یک مدل الحاقی به منظور تخمین عیب حسگر برای یک سیستم چندعاملی زمان گسسته و بدون رهبر با هدف اجماع معرفی شده است. بر اساس این مدل الحاقی یک رویه‌گر لیونبرگر به منظور تخمین هم‌زمان متغیرهای حالت و عیب حسگر طراحی شده است. مسئله‌ی تشخیص، تخمین و جداسازی عیب حسگر در سیستم‌های چندعاملی زمان گسسته و رهبر-پیرو در [۲۲] مورد بررسی قرار گرفته است. این مقاله عیب حسگر با طراحی بانکی از رویه‌گر تشخیص، جداسازی و تخمین زده می‌شود. نکته قابل توجه در این مقاله، متفاوت بودن دینامیک عامل رهبر با عامل‌های پیرو می‌باشد. تمهید این مقاله به حالت زمان پیوسته در مقاله [۲۳] انجام شده است. در هر دو مقاله، رویه‌گرهای طراحی شده برای هر عامل تنها از اطلاعات همان عامل استفاده می‌کند که حالت ساده‌تری از رویه‌گرهای توزیع‌شده محسوب می‌شوند. در [۲۴] یک سیستم چندعاملی زمان گسسته به همراه اغتشاش، نویز اندازه‌گیری و عیب حسگر در نظر گرفته شده است. در این مقاله از نظریه سیستم‌های سینگولار به منظور توصیف یک مدل الحاقی

۳. پیش‌نیازها و بیان مسئله

۱.۳ نظریه گراف

توپولوژی یک شبکه‌ی ارتباطی را می‌توان توسط یک گراف جهت‌دار یا بدون جهت بر اساس اینکه جریان اطلاعات یک طرفه یا دوطرفه باشد؛ نشان داد. توپولوژی ارتباطی سیستم‌های چندعاملی نیز از این قاعده مستثنی نیست. توپولوژی ارتباطی بین N عامل پیرو توسط گراف $G(V, E, A)$ توصیف می‌شود که در آن، $V = \{1, 2, \dots, N\}$ مجموعه‌ای از N گره و هر گره نماینده یک

در ادامه، تعاریف پایه‌ای مورد استفاده در این مقاله بیان می‌شوند.

تعریف ۱ [۳۰]: سیستم سینگولار به صورت معادله (۳) در نظر گرفته می‌شود.

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (3)$$

• سیستم سینگولار (۳) در حالت ورودی صفر ($u=0$) را منظم گویند اگر ثابت $s \in \mathbb{C}$ وجود داشته باشد به طوری که معادله (۴) برقرار باشد.

$$\det(sE - A) \neq 0 \quad (4)$$

• سیستم سینگولار (۳) در حالت ورودی صفر ($u=0$) را بدون ضربه گویند اگر شرط (۵) برقرار باشد.

$$\deg(\det(sE - A)) = \text{rank}(E) \quad (5)$$

• سیستم سینگولار (۳) مجاز است اگر منظم، پایدار و بدون ضربه باشد.

• سیستم (۳) رویت پذیر نسبی است اگر و تنها اگر رابطه (۶) برقرار باشد.

$$\text{rank} \begin{pmatrix} sE - A \\ C \end{pmatrix} = n, \quad \forall s \in \mathbb{C} \quad (6)$$

• سیستم (۳) کنترل پذیر نسبی است اگر و تنها اگر رابطه (۷) برقرار باشد.

$$\text{rank} \begin{pmatrix} sE - A & B \end{pmatrix} = n, \quad \forall s \in \mathbb{C} \quad (7)$$

تعریف ۲ [۳۱]: یک سیستم چندعاملی رهبر-پیرو خطی با دینامیک کلی و گراف بدون جهت در نظر گرفته می‌شود. تحت این شرایط اجماع به صورت معادله (۸) تعریف می‌شود.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - x_r(t)\| = 0, \quad \forall x_i(0), x_r(0) \quad (8)$$

در این مقاله فرض‌هایی در نظر گرفته شده است، که در ادامه به آن اشاره می‌شود.

فرض ۱: سیستم سینگولار (۱) به ازای $i = 1, 2, \dots, N$ منظم و بدون ضربه است.

فرض ۲: گراف تعاملی سیستم متصل، بدون جهت و ثابت با زمان است.

فرض ۳: ماتریس مربعی D_f در سیستم (۱) رتبه کامل دارد.

فرض ۴: سیستم سینگولار (۱) رویت پذیر نسبی و کنترل پذیر نسبی است.

فرض‌های ۱، ۲ فرض‌های رایجی به ترتیب در تحلیل سیستم‌های سینگولار، سیستم‌های چندعاملی است. فرض ۳ به این موضوع اشاره دارد که تعداد عیب‌ها نمی‌تواند از تعداد خروجی‌های سیستم تجاوز کند. از طرفی با توجه به اینکه عیب ذاتاً غیرقابل پیشبینی است لذا در این مقاله فرض شده است که در تمامی کانال‌های خروجی امکان وقوع عیب وجود دارد و مربعی در نظر

عامل در گراف می‌باشد. $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ نشان‌دهنده مجموعه‌ای از یال‌ها که ارتباط بین دو عامل را مشخص می‌کند و $A = [a_{ij}]_{N \times N}$ ماتریس مجاورت مربوطه است. اگر $(j, i) \in \mathcal{E}$ یا عامل j در همسایگی عامل i باشد، در آن صورت $a_{ij} = 1$ و در غیر اینصورت، $a_{ij} = 0$ است. لازم به ذکر است همواره $a_{ii} = 0$ می‌باشد. ماتریس لاپلاسیان $L = [l_{ij}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$ با استفاده از ماتریس مجاورت A و گراف \mathcal{G} تعریف می‌شود به طوری که $l_{ij} = -a_{ij}$ و $l_{ii} = \sum_{j=1, j \neq i}^N a_{ij}$ است. در گراف‌های بدون جهت، ماتریس لاپلاسیان متقارن است. در حالت رهبر-پیرو، سیستم چندعاملی شامل یک رهبر (با اندیس r) و N عامل پیرو (با اندیس i) است. ماتریس $G = \text{diag}(g_1, g_2, \dots, g_N)$ به عنوان ماتریس ارتباط بین عامل‌های پیرو و عامل رهبر تعریف می‌شود. اگر عامل i در همسایگی رهبر باشد، $g_i = 1$ و در غیر اینصورت، $g_i = 0$ است. مسیر v_i به v_j در گراف \mathcal{G} یک توالی از گره‌های مجاور است که شروع آن از v_i و پایان آن v_j می‌باشد. اگر در یک گراف، یک مسیر بین هر گره وجود داشته باشد، گراف متصل است. در حالت رهبر-پیرو، تنها مسیری که همه گره‌ها را شامل می‌شود، از عامل رهبر شروع می‌شود.

لم ۱ [۲۹]: ماتریس $L+G$ مثبت معین و دارای مقادیر ویژه مثبت است اگر و تنها اگر گراف \mathcal{G} متصل باشد.

۲.۳ فرمول‌بندی مسئله

عامل‌های پیرو یک سیستم چندعاملی سینگولار خطی، همگن، نامتغیر با زمان و در حضور عیب حسگر به صورت معادله (۱) در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{aligned} E\dot{x}_i(t) &= Ax_i(t) + Bu_i(t) \\ y_i(t) &= Cx_i(t) + D_f f_{si}(t), \quad i = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (1)$$

که در آن، $x_i(t) \in \mathbb{R}^n$ بردار متغیرهای حالت، $u_i(t) \in \mathbb{R}^m$ بردار ورودی کنترلی، $y_i(t) \in \mathbb{R}^r$ بردار خروجی اندازه‌گیری شده و $f_{si}(t) \in \mathbb{R}^r$ بردار عیب حسگرهای عامل i هستند. ماتریس‌های E, A, B, C, D_f ثابت و حقیقی با ابعاد مناسب می‌باشند. ماتریس E سینگولار بوده و دارای مرتبه به صورت $\text{rank}(E) = k < n$ می‌باشد.

هم‌چنین، دینامیک عامل رهبر به صورت معادله (۲) در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{aligned} E\dot{x}_r(t) &= Ax_r(t) + Bu_r(t) \\ y_r(t) &= Cx_r(t) \end{aligned} \quad (2)$$

که در آن، $x_r(t) \in \mathbb{R}^n$ ، $u_r(t) \in \mathbb{R}^m$ و $y_r(t) \in \mathbb{R}^r$ به ترتیب بردار متغیرهای حالت، بردار ورودی کنترلی و بردار خروجی عامل رهبر می‌باشد.

$$\bar{E} = \begin{bmatrix} E_{n \times n} & 0_{n \times r} \\ 0_{r \times n} & 0_{r \times r} \end{bmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} A_{n \times n} & 0_{n \times r} \\ -C_{r \times n} & -D_{f_{r \times r}} \end{bmatrix}, \quad (11)$$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} B_{n \times m} & 0_{n \times r} \\ 0_{r \times m} & I_r \end{bmatrix}, \quad \bar{C} = [C \quad D_f]$$

دینامیک جمعی مدل الحاقی (۹) نیز با تعریف متغیرهای جمعی و با بهره‌گیری از معادله (۱۲) به صورت معادله (۱۳) بدست می‌آید.

$$\bar{X}(t) = \begin{bmatrix} \bar{x}_1(t) \\ \bar{x}_2(t) \\ \vdots \\ \bar{x}_N(t) \end{bmatrix}, \quad \bar{U}(t) = \begin{bmatrix} \bar{u}_1(t) \\ \bar{u}_2(t) \\ \vdots \\ \bar{u}_N(t) \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$(I_N \otimes \bar{E})\dot{\bar{X}}(t) = (I_N \otimes \bar{A})\bar{X}(t) + (I_N \otimes \bar{B})\bar{U}(t) \quad (13)$$

$$Y(t) = (I_N \otimes \bar{C})\bar{X}(t)$$

تحلیل منظم بودن و بدون ضربه بودن در نظریه سیستم‌های سینگولار از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. از یک سو منظم بودن یک سیستم سینگولار تضمین‌کننده وجود پاسخ برای آن سیستم است و از سویی دیگر بدون ضربه بودن سیستم سینگولار موید آن است که سیستم دارای رفتار مخرب نخواهد بود. چراکه رفتار ضربه‌گونه‌ی سیستم باعث وارد شدن آسیب جدی به آن خواهد می‌شود و ایمنی آن را با خطر با مواجه می‌سازد. به عنوان نمونه این رفتار ضربه‌گونه در سیستم‌های الکتریکی و فرآیندهای شیمیایی به ترتیب با جرقه و انفجار نمود پیدا خواهند کرد. بنابراین، از آن جا که مدل الحاقی پیشنهادی به صورت سینگولار است لذا ضروری است که ویژگی منظم بودن و بدون ضربه بودن آن مورد بررسی قرار گیرد. لم (۲) این موضوع را نشان می‌دهد.

لم ۲: مدل الحاقی (۹) منظم و بدون ضربه است اگر و تنها اگر سیستم (۱) منظم و بدون ضربه باشد.

اثبات: رابطه دترمینان برای ماتریس‌های قطری بلوکی به صورت معادله (۱۴) است.

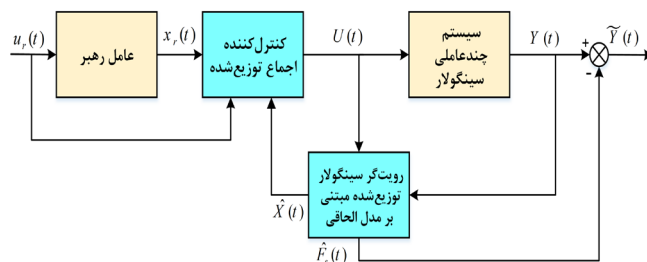
$$\begin{vmatrix} A & B \\ 0 & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & 0 \\ C & D \end{vmatrix} = |A| |D| \quad (14)$$

از طرفی طبق تعریف (۱)، شرط منظم بودن مدل الحاقی (۹) به صورت رابطه‌ی (۱۵) بیان می‌شود.

$$\det(s\bar{E} - \bar{A}) = \begin{vmatrix} sE - A & 0 \\ C & D_f \end{vmatrix} = |sE - A| |D_f| \quad (15)$$

از آن جا که ماتریس D_f رتبه کامل فرض شده است، لذا مدل الحاقی (۹) منظم است اگر و تنها اگر شرط منظم بودن برای سیستم (۱) برقرار باشد که طبق فرض (۴) سیستم (۱) منظم در نظر گرفته شده‌است.

گرفتن ماتریس D_f نیز به این موضوع اشاره دارد. هم‌چنین، فرض ۴ شرط لازم برای طراحی رویت‌گر و کنترل‌کننده است. در این مقاله، عیب حسگر در سیستم‌های چندعملی سینگولار در نظر گرفته شده است. یک مدل الحاقی با استفاده از خروجی سیستم به منظور تخمین عیب حسگر معرفی می‌شود. بر اساس مدل الحاقی، یک رویت‌گر توزیع‌شده سینگولار به منظور تخمین متغیرهای حالت سیستم و عیب حسگر به صورت هم‌زمان طراحی شده است. سپس با استفاده از تخمین حالت‌های انجام شده، یک کنترل‌کننده توزیع‌شده مبتنی بر رویت‌گر به منظور اجماع رهبر-پیرو برای سیستم طراحی شده است. از آن جا که تخمین حالت‌های انجام شده از روی خروجی معیوب حاصل می‌شود و از تخمین حالت‌های سیستم برای طراحی کنترل‌کننده استفاده می‌شود، لذا کنترل‌کننده طراحی‌شده را می‌توان کنترل‌کننده تحمل پذیر عیب حسگر دانست. دیاگرام بلوکی ساختار بیان شده در شکل (۱) نشان داده شده است. قسمت‌های مختلف ساختار کنترل پیشنهادی و جزئیات آن به تفصیل در قسمت‌های بعدی بیان می‌شوند.



شکل ۱- دیاگرام بلوکی ساختار رویت‌گر و کنترل‌کننده بیان‌شده در مقاله.

۴. نتایج اصلی

۱.۴ مدل الحاقی

به منظور تخمین عیب حسگر در سیستم (۱)، از رویکرد ترکیب معادلات خروجی با معادلات فضای حالت سیستم استفاده شده است. با استفاده از این رویکرد، تخمین هم‌زمان بردار متغیرهای حالت و عیب حسگر قابل انجام است. به همین منظور با استفاده از اطلاعاتی که از خروجی اندازه‌گیری شده‌ی هر عامل در دسترس است، مدل الحاقی به صورت معادله (۹) تشکیل می‌شود.

$$\bar{E}\dot{\bar{X}}_i(t) = \bar{A}\bar{X}_i(t) + \bar{B}\bar{u}_i(t) \quad (9)$$

$$y_i(t) = \bar{C}\bar{x}_i(t), \quad i = 1, \dots, N$$

متغیرهای مدل الحاقی (۹) به صورت معادله (۱۰) معرفی می‌شوند.

$$\bar{x}_i(t) = \begin{bmatrix} x_i(t) \\ f_{si}(t) \end{bmatrix}, \quad \bar{u}_i(t) = \begin{bmatrix} u_i(t) \\ y_i(t) \end{bmatrix} \quad (10)$$

پارامترهای مدل الحاقی (۹) به صورت معادله (۱۱) تعریف می‌شوند.

$$\begin{aligned} (I_N \otimes E)\hat{X}(t) &= (I_N \otimes \bar{A})\hat{X}(t) + (I_N \otimes \bar{B})\bar{U}(t) \\ &+ ((L+G) \otimes R)Y(t) - ((L+G) \otimes R\bar{C})\hat{X}(t) \\ &= ((I_N \otimes \bar{A}) - ((L+G) \otimes R\bar{C}))\hat{X}(t) \\ &+ (I_N \otimes \bar{B})\bar{U}(t) + ((L+G) \otimes R)Y(t) \end{aligned} \quad (20)$$

برای تضمین همگرایی تخمین حالت‌های مدل الحاقی به حالت‌های اصلی آن، ابتدا خطای تخمین به صورت $e_i(t) = \bar{x}_i(t) - \hat{x}_i(t)$ تعریف می‌شود. حال، دینامیک خطای تخمین حالت‌های مدل الحاقی به صورت معادله‌ی (۲۱) بدست می‌آید.

$$\begin{aligned} \bar{E}\dot{e}_i(t) &= \bar{A}\bar{x}_i(t) - \bar{A}\hat{x}_i(t) - R\left(\sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}((y_j(t) - \hat{y}_j(t)) - (y_j(t) - \hat{y}_j(t)))\right) + g_i(y_i(t) - \hat{y}_i(t)) \\ &= \bar{A}e_i(t) - R\left[\sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(\bar{C}e_j(t) - \bar{C}e_j(t)) + g_i(\bar{C}e_i(t))\right] \end{aligned} \quad (21)$$

حال با تعریف متغیر جمعی به صورت $e(t) = [e_1(t)^T \ e_2(t)^T \ \dots \ e_N(t)^T]^T$ خطای تخمین حالت به صورت معادله (۲۲) بدست می‌آید.

$$\begin{aligned} (I_N \otimes \bar{E})\dot{e}(t) &= ((I_N \otimes \bar{A}) - ((L+G) \otimes R\bar{C}))e(t) \end{aligned} \quad (22)$$

به منظور سهولت در تحلیل پایداری دینامیک خطای تخمین (۲۲)، یک تبدیل تشابه‌ی به منظور قطری‌سازی، در معادله (۲۳) معرفی می‌شود. دینامیک خطای تخمین (۲۲) به دلیل وجود ماتریس لاپلاسی به صورت کامل قطری نیست.

$$\tilde{e}(t) = (M^{-1} \otimes I_{n+r})e(t) \quad (23)$$

ستون‌های ماتریس M از بردارهای ویژه ماتریس $L+G$ تشکیل شده است. با توجه به تعریف متغیر جدید، دینامیک خطای تخمین حالت بر حسب متغیر جدید به صورت زیر بازنویسی می‌شود.

$$\begin{aligned} (I_N \otimes \bar{E})(M \otimes I_n)\dot{\tilde{e}}(t) &= ((I_N \otimes \bar{A}) - ((L+G) \otimes R\bar{C}))(M \otimes I_n)\tilde{e}(t) \\ (M \otimes \bar{E})\dot{\tilde{e}}(t) &= ((M \otimes \bar{A}) - ((L+G)M \otimes R\bar{C}))\tilde{e}(t) \end{aligned} \quad (24)$$

حال از سمت چپ، عبارت $(M^{-1} \otimes I_n)$ را در طرفین تساوی فوق ضرب می‌کنیم.

$$\begin{aligned} (M^{-1}M \otimes \bar{E})\dot{\tilde{e}}(t) &= ((M^{-1}M \otimes \bar{A}) - (M^{-1}(L+G)M \otimes R\bar{C}))\tilde{e}(t) \end{aligned} \quad (25)$$

با توجه به رابطه $M^{-1}(L+G)M = \Lambda$ داریم:

$$(I_N \otimes \bar{E})\dot{\tilde{e}}(t) = ((I_N \otimes \bar{A}) - (\Lambda \otimes R\bar{C}))\tilde{e}(t). \quad (26)$$

اکنون قضیه ۱ به منظور تحلیل پایداری دینامیک خطای تخمین حالت (۲۶) و بدست آوردن ماتریس بهره R در رویت گر سینگولار

برای بررسی بدون ضربه بودن مدل الحاقی (۹) با در نظر داشتن رابطه $\text{rank}(\bar{E}) = \text{rank}(E)$ به صورت زیر عمل می‌شود:

$$\deg(\det(s\bar{E} - \bar{A})) = \deg(|sE - A| |D_f|). \quad (16)$$

از آنجا که دترمینان ماتریس D_f یک اسکالر است، لذا روی درجه تاثیری نمی‌گذارد و در نهایت شرط بدون ضربه بودن به صورت زیر برقرار است:

$$\begin{aligned} \deg(\det(s\bar{E} - \bar{A})) &= \deg(|sE - A| |D_f|) \\ &= \text{rank}(\bar{E}) = \text{rank}(E). \end{aligned} \quad (17)$$

بنابراین، اثبات کامل می‌شود. □

توجه ۱: ساختار در نظر گرفته شده برای مدل الحاقی در این مقاله جدید است. شایان ذکر است، در برخی از فعالیت‌های تحقیقاتی مانند [۲۶، ۲۵] از مدل الحاقی سینگولار با ساختار متفاوت از مدل پیشنهادی توسط این مقاله نیز در نظر گرفته شده‌اند، اما منظم بودن و بدون ضربه بودن در آن‌ها در نظر گرفته نشده است.

۲.۴ طراحی رویت گر سینگولار توزیع شده

در این بخش، یک رویت گر توزیع شده سینگولار به منظور تخمین حالت‌های مدل الحاقی (۹) طراحی می‌شود. معادله دینامیکی رویت گر به صورت رابطه (۱۸) در نظر گرفته شده است:

$$\begin{aligned} \bar{E}\dot{\hat{x}}_i(t) &= \bar{A}\hat{x}_i(t) + \bar{B}\bar{u}_i(t) \\ &+ R\left(\sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}((y_j(t) - \hat{y}_j(t)) - (y_j(t) - \hat{y}_j(t)))\right) + g_i(y_i(t) - \hat{y}_i(t)) \end{aligned} \quad (18)$$

که در آن $\hat{x}_i(t) \in \mathbb{R}^{n+r}$ بردار تخمین حالت عامل i ، $\hat{y}_i(t) \in \mathbb{R}^r$ بردار تخمین خروجی عامل i ، g_i درایه‌های ماتریس قطری G ، \mathcal{N}_i مجموعه همسایگی عامل i و ماتریس R ماتریس طراحی بهره رویت گر که در ادامه طراحی خواهد شد.

همان‌طور که در ساختار رویت گر (۱۸) قابل مشاهده است، علاوه بر خروجی هر عامل از خروجی عامل‌های همسایه برای تخمین حالت‌های آن عامل استفاده شده است. این موضوع به این معناست که رویت گر طراحی شده توزیع شده است.

همان‌طور که پیش از این بیان شد، رویت گر طراحی شده قادر به تخمین حالت‌های سیستم و عیب حسگر به صورت هم‌زمان می‌باشد. سیگنال‌های تخمین به صورت رابطه (۱۹) قابل محاسبه است.

$$\begin{aligned} \hat{X}(t) &= (I_N \otimes m_1)\hat{X}(t), \quad \hat{F}_s(t) = (I_N \otimes m_2)\hat{X}(t) \\ m_1 &= [I_n \ 0_{n \times r}], \quad m_2 = [0_{r \times n} \ I_r] \end{aligned} \quad (19)$$

در ادامه به منظور سهولت در نوشتار و یکپارچه کردن نمایش دینامیک رویت گر در عامل‌های مختلف، از نمایش جمعی آن به صورت زیر استفاده خواهد شد.

محاسبه می‌شود و اثبات کامل می‌شود. در روند اثبات این قضیه، از مرجع [۳۲] استفاده شد.

توجه ۲: در شرایطی که مقادیر ویژه ماتریس $L+G$ تکراری باشند؛ ماتریس Λ ، یک ماتریس قطری بلوکی بوده و نامساوی خطی ماتریسی (۲۷) از روشی مشابه به صورت بدست می‌آید.

۳.۴ طراحی کنترل کننده توزیع شده

در این بخش، کنترل کننده اجماع رهبر-پیرو و اجماع متغیر با زمان برای سیستم چندعاملی با دینامیک عامل‌های پیرو به صورت سیستم (۱) و دینامیک عامل رهبر به صورت سیستم (۲) طراحی می‌شود.

پروتکل کنترل اجماع پیشنهاد شده با فرض در دسترس بودن حالت‌های سیستم در این بخش به صورت معادله (۳۴) است:

$$u_i(t) = -cK \left(\sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} (x_i(t) - x_j(t)) + g_i (x_i(t) - x_r(t)) \right) + u_r(t) \quad (34)$$

که در آن، $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ماتریس بهره پیشخور حالت و c اسکالر کوپلینگ توپولوژی هستند. در بسیاری از کاربردها، فرض در دسترس بودن حالت‌ها برای سیستم یک فرض به نسبت محدودکننده است که در بخش بعدی با اثبات اصل جدایی پذیری این فرض مرتفع می‌شود. با تعریف بردار متغیر عدم اجماع به صورت $\tilde{x}_i(t) = x_i(t) - x_r(t)$ ، دینامیک عدم اجماع با توجه به سیستم‌های (۱) و (۲) به صورت معادله (۳۵) بدست می‌آید.

$$E\dot{\tilde{x}}_i(t) = A\tilde{x}_i(t) + Bu_i(t) - Bu_r(t) \quad (35)$$

حال با اعمال قانون کنترل (۳۴) به سیستم (۳۵) رابطه (۳۶) حاصل می‌شود:

$$E\dot{\tilde{x}}_i(t) = A\tilde{x}_i(t) - cBK \left(\sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} (x_i(t) - x_j(t)) \pm x_r(t) \right) + g_i (x_i(t) - x_r(t)) - cBK \left(\sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} (\tilde{x}_i(t) - \tilde{x}_j(t)) + g_i \tilde{x}_i(t) \right) \quad (36)$$

که دینامیک جمعی سیستم حلقه بسته را می‌توان با تعریف متغیر $\tilde{X} = [\tilde{x}_1(t)^T \quad \tilde{x}_2(t)^T \quad \dots \quad \tilde{x}_N(t)^T]^T$ به صورت معادله (۳۷) نمایش داد.

$$(I_N \otimes E)\dot{\tilde{X}}(t) = [(I_N \otimes A) - ((L+G) \otimes cBK)]\tilde{X}(t) \quad (37)$$

به منظور سهولت در تحلیل سیستم (۳۷)، از تبدیل تشابه‌ی توصیف شده در معادله (۳۸) استفاده می‌کنیم. در این صورت سیستم (۳۷) به صورت رابطه (۳۹) تبدیل می‌شود.

$$X_d(t) = (M^{-1} \otimes I_n)\tilde{X}(t) \quad (38)$$

$$(I_N \otimes E)\dot{X}_d(t) = [(I_N \otimes A) - (\Lambda \otimes cBK)]X_d(t) \quad (39)$$

توزیع شده (۱۸) در شرایطی که ماتریس $L+G$ فاقد مقادیر ویژه تکراری باشد؛ ارائه می‌شود.

قضیه ۱: دینامیک خطای تخمین حالت (۲۶) پایدار است اگر ماتریس مثبت معین $P \in \mathbb{R}^{(n+r) \times (n+r)}$ و ماتریس $Q \in \mathbb{R}^{(n+r) \times r}$ وجود داشته باشند به طوری که نامساوی‌های ماتریسی رابطه (۲۷) برقرار باشد.

$$\bar{A}^T P + P\bar{A} - \lambda_{\min}(\bar{C}^T Q^T + Q\bar{C}) < 0 \quad (27)$$

$$P\bar{E} = \bar{E}^T P \geq 0$$

ماتریس بهره‌ی رویت‌گر با استفاده از حل نامساوی خطی ماتریسی فوق به صورت رابطه (۲۸) بدست می‌آید.

$$R = P^{-1}Q \quad (28)$$

اثبات: تابع لیاپانوف (۲۹) را در نظر بگیرید.

$$V(e(t)) = \tilde{e}^T(t)(I_N \otimes P\bar{E})\tilde{e}(t) \quad (29)$$

مشق تابع لیاپانوف به صورت رابطه (۳۰) بدست می‌آید.

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{e}(t)) &= \dot{\tilde{e}}(t)^T (I_N \otimes \bar{E}^T) (I_N \otimes P)\tilde{e}(t) \\ &+ \tilde{e}(t)^T (I_N \otimes P)(I_N \otimes \bar{E})\dot{\tilde{e}}(t) \\ &= \tilde{e}^T(t) [(I_N \otimes \bar{A}^T) - (\Lambda \otimes \bar{C}^T R^T)] (I_N \otimes P)\tilde{e}(t) \\ &+ \tilde{e}^T(t)(I_N \otimes P) [(I_N \otimes \bar{A}) - (\Lambda \otimes \bar{R}C)] \tilde{e}(t) \end{aligned} \quad (30)$$

پس از ساده‌سازی و فاکتورگیری‌های لازم تساوی زیر حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{e}(t)) &= \tilde{e}^T(t) ((I_N \otimes (\bar{A}^T P + P\bar{A}) \\ &- (\Lambda \otimes (\bar{C}^T R^T P + P\bar{R}C))) \tilde{e}(t) \end{aligned} \quad (31)$$

معادله (۳۱) هنوز به فرم خطی تبدیل نشده است. با تعریف متغیر جدید به صورت $Q = PR$ ، معادله (۳۱) به صورت رابطه (۳۲) بدست می‌آید.

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{e}(t)) &= \tilde{e}^T(t) ((I_N \otimes (\bar{A}^T P + P\bar{A}) \\ &- (\Lambda \otimes (\bar{C}^T Q^T + Q\bar{C}))) \tilde{e}(t) \end{aligned} \quad (32)$$

با توجه به قطری بودن ماتریس مثبت معین Λ می‌توان نامساوی $\lambda_{\min} I_N \leq \Lambda$ را برای آن متصور بود. از طرفی معادله (۳۲) از N ماتریس قطری تشکیل شده است. در این شرایط به راحتی می‌توان نامساوی (۳۳) را نتیجه گرفت کرد.

$$\bar{A}^T P + P\bar{A} - \lambda_{\min}(\bar{C}^T Q^T + Q\bar{C}) < 0 \quad (33)$$

λ_{\min} کوچک‌ترین مقدار ویژه ماتریس $L+G$ است. همین‌طور از آن‌جا که مقادیر ویژه ماتریس $L+G$ همگی مثبت هستند، لذا کوچک‌ترین مقدار ویژه بدترین حالت را بدست می‌دهد. بنابراین اگر نامساوی خطی ماتریسی در بدترین حالت حل شود، در دیگر حالات نیز پایداری حفظ می‌شود. همان‌طور که مشاهده می‌شود، مجهولات نامساوی (P و Q)، به صورت خطی در معادله (۳۳) ظاهر شده است. بنابراین با حل این نامساوی خطی، مجهولات P و Q بدست آمده و بعد از آن ماتریس بهره رویت‌گر از رابطه (۲۸)

خطی ماتریسی در بدترین حالت حل شود، در شرایط دیگر نیز پایداری حفظ می‌شود. به همین منظور ضریب کوپلینگ را به صورت $c = \frac{1}{\lambda_{\min}}$ می‌توان در نظر گرفت که λ_{\min} کوچکترین مقدار ویژه ماتریس $L+G$ است. حال با حل نامساوی خطی (۴۶)، مجهولات Z و W بدست آمده و بعد از آن ماتریس بهره کنترل کننده از رابطه (۴۱) محاسبه می‌شود و اثبات کامل می‌شود.

در روند اثبات این قضیه، از مرجع [۳۲] استفاده شد. □

توجه ۳: در شرایطی که مقادیر ویژه ماتریس $L+G$ تکراری باشند؛ ماتریس Λ ، یک ماتریس قطری بلوکی بوده و نامساوی خطی ماتریسی (۴۱) از روشی مشابه به صورت $(I_N \otimes (ZA^T + AZ) - c(\Lambda \otimes (W^T B^T + BW))) \leq 0$ بدست می‌آید.

۴.۴ اصل جدایی پذیری

در این بخش، اصل جدایی پذیری که یک اصل بسیار مهم در تئوری سیستم‌های کنترل است؛ اثبات می‌شود. اثبات این اصل این نتیجه را می‌دهد که می‌توان در یک سیستم، رویت گر را بدون در نظر گرفتن کنترل کننده به طور مستقل طراحی کرد. همین طور طراحی کنترل کننده فیدبک حالت نیز با فرض در دسترس بودن حالت‌های سیستم انجام می‌شود. سپس از خروجی رویت گر که تخمین حالت‌های سیستم است، برای کنترل فیدبک حالت استفاده کرد. بنابراین اثبات برقراری این اصل امری ضروری به نظر می‌رسد. قانون کنترل (۳۴) با استفاده از تخمین حالت‌ها به صورت معادله (۴۷) بیان می‌شود.

$$u_i(t) = -cK \left(\sum_{j \in N_i} a_{ij} (\hat{x}_i(t) - \hat{x}_j(t) \pm x_r(t)) + g_i (\hat{x}_i(t) - x_r(t)) + u_r(t) \right) \quad (47)$$

$$-cK \left(\sum_{j \in N_i} a_{ij} (\hat{x}_i(t) - \hat{x}_j(t)) + g_i \hat{x}_i(t) \right) + u_r(t) \quad (48)$$

با جایگذاری قانون کنترل (۴۷) در رابطه (۳۵) معادله حاصل می‌شود:

$$E \dot{\hat{x}}_i(t) = A \hat{x}_i(t) - cBK \left(\sum_{j \in N_i} a_{ij} (\hat{x}_i(t) - \hat{x}_j(t)) + g_i \hat{x}_i(t) \right), \quad (48)$$

که دینامیک جمعی سیستم (۴۸) به صورت معادله (۴۹) بدست می‌آید.

$$(I_N \otimes E) \dot{\hat{X}}(t) = (I_N \otimes A) \hat{X}(t) - c((L+G) \otimes BK) \hat{X}(t) \quad (49)$$

از طرفی خطای تخمین حالت رویت گر افزوده شده به

$$e_i(t) = \bar{x}_i(t) - \hat{x}_i(t) \quad (50)$$

صورت $e_i(t) = \bar{x}_i(t) - \hat{x}_i(t)$ تعریف شد. همین طور با در نظر

جزئیات تبدیل استفاده شده شبیه به معادله‌های (۲۴)،

(۲۵) و (۲۶) می‌باشد. حال قضیه ۲ به منظور طراحی کنترل کننده پایدارساز برای دینامیک (۳۹) در شرایطی که ماتریس $L+G$ فاقد مقادیر ویژه تکراری باشد؛ بیان می‌شود.

قضیه ۲: دینامیک (۳۹) پایدار است اگر ماتریس مثبت معین $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ و ماتریس $W \in \mathbb{R}^{n \times m}$ وجود داشته باشند به طوری که نامساوی‌های ماتریسی خطی (۴۰) برقرار باشد.

$$ZA^T + AZ - c\lambda_i (W^T B^T + BW) < 0 \quad (40)$$

$$P\bar{E} = \bar{E}^T P \geq 0$$

که در آن، $Z = P^{-1}$ و ماتریس بهره کنترل کننده هم پس از حل نامساوی خطی ماتریسی به صورت (۴۱) بدست می‌آید.

$$K = WZ^{-1} \quad (41)$$

اثبات: تابع لیاپانوف مثبت نیمه معین در رابطه (۴۲) در نظر گرفته می‌شود.

$$V(X_d(t)) = X_d^T(t) (I_N \otimes P\bar{E}) X_d(t) \quad (42)$$

مشق تابع لیاپانوف به صورت رابطه (۴۳) بدست می‌آید.

$$\begin{aligned} \dot{V}(X_d(t)) &= \dot{X}_d^T(t) (I_N \otimes \bar{E}^T) (I_N \otimes P) X_d(t) \\ &+ X_d^T(t) (I_N \otimes P) (I_N \otimes \bar{E}) \dot{X}_d(t) \\ &= X_d^T(t) \left[(I_N \otimes A^T) - c(\Lambda \otimes K^T B^T) \right] (I_N \otimes P) X_d(t) \\ &+ X_d^T(t) (I_N \otimes P) \left[(I_N \otimes A) - c(\Lambda \otimes BK) \right] X_d(t) \end{aligned} \quad (43)$$

با توجه به این که در معادله (۴۳) ماتریس‌های مجهول در ترم‌های معادله ماتریسی به صورت هم‌زمان وجود دارند، این معادله خطی نیست. برای حل این مشکل ماتریس P^{-1} از چپ و راست در معادله ماتریسی (۴۳) ضرب می‌شود.

$$\begin{aligned} \dot{V}(X_d(t)) &= (I_N \otimes (P^{-1} A^T + AP^{-1})) \\ &- c(\Lambda \otimes (P^{-1} K^T B^T + BKP^{-1})). \end{aligned} \quad (44)$$

با تعریف $P^{-1} = Z$ و $KZ = W$ رابطه (۴۵) حاصل می‌شود:

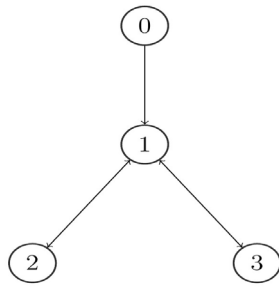
$$\begin{aligned} \dot{V}(X_d(t)) &= (I_N \otimes (ZA^T + AZ)) \\ &- c(\Lambda \otimes (W^T B^T + BW)) \end{aligned} \quad (45)$$

همانطور که مشاهده می‌شود، معادله (۴۵) به یک معادله خطی ماتریسی تبدیل شده است.

مشابه با فرآیند اثبات قضیه ۱، با توجه به قطری بودن ماتریس مثبت معین Λ می‌توان نامساوی $\lambda_{\min} I_N \leq \Lambda$ را برای آن متصور بود. حال برای تجزیه معادله ماتریسی، از آن‌جا که معادله (۴۵) از N ماتریس قطری تشکیل شده است، بنابراین می‌توان این معادله را به صورت نامعادله (۴۶) تجزیه کرد:

$$\Delta = ZA^T + AZ - c\lambda_i (W^T B^T + BW) < 0, \quad (46)$$

که λ_i مقادیر ویژه ماتریس $L+G$ است. همین طور از آن‌جا که مقادیر ویژه ماتریس $L+G$ همگی مثبت هستند، لذا کوچکترین مقدار ویژه بدترین حالت را بدست می‌دهد. بنابراین اگر نامساوی



شکل ۲- گراف ارتباطی سیستم

ماتریس L و G در آن به صورت معادله (۵۵) است.

$$L = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (۵۵)$$

همچنین، عیب حسگر به صورت رابطه (۵۶) در نظر گرفته شده است. باید توجه داشت که منظور از f_{ij} عیب حسگر j در عامل i است.

$$\begin{cases} f_{11}(t) = 0/1t - 0.5 & 5 < t < 10 \\ f_{11}(t) = 0 & O.W \\ f_{12}(t) = 0 & \forall t \\ f_{21}(t) = 0 & \forall t \\ f_{22}(t) = \sin(t) & 11 < t < 14 \\ f_{22}(t) = 0 & O.W \\ f_{31}(t) = 1 & 15 < t < 24 \\ f_{31}(t) = 0 & O.W \\ f_{32}(t) = 0 & \forall t \end{cases} \quad (۵۶)$$

ورودی عامل رهبر نیز به صورت $u_r(t) = \cos(t)$ می باشد. حال با طراحی رویتر سینگولار توزیع شده، تخمین متغیرهای حالت و عیب حسگر به صورت هم زمان انجام می شود. با حل نامساوی خطی ماتریسی (۲۷)، ماتریس بهره رویتر و ماتریس P بدست می آید که به صورت معادله (۵۷) است.

$$R = \begin{bmatrix} -0.4092 & 0.0114 \\ 0.0184 & -0.4409 \\ -0.5102 & 0.7007 \\ -0.0272 & -0.0217 \\ -0.0211 & -0.0068 \end{bmatrix} \quad (۵۷)$$

$$P = \begin{bmatrix} 0.276 & 0.001 & 0 & 0 & 0 \\ 0.001 & 0.309 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.161 & 0.016 & -0.018 \\ 0 & 0 & 0.016 & 0.531 & 0.003 \\ 0 & 0 & -0.018 & 0.003 & 0.534 \end{bmatrix}$$

با حل نامساوی خطی ماتریسی (۴۰) ماتریس بهره کنترل کننده K و ماتریس Z به صورت معادله (۵۸) بدست می آید.

$$K = [-0.1043 \quad 0.0885 \quad 0.0146]$$

$$Z = \begin{bmatrix} 0.2090 & 0.0223 & 0 \\ 0.0223 & 0.1802 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1593 \end{bmatrix} \quad (۵۸)$$

داشتن خطای تخمین حالت مدل الحاقی، خطای تخمین حالت سیستم را بدست آورد:

$$\begin{aligned} m_1 e_i(t) &= x_i(t) - \hat{x}_i(t) \\ &= x_i(t) - \hat{x}_i(t) \pm x_r(t) \\ &= \tilde{x}_i(t) - \hat{\tilde{x}}_i(t) \end{aligned} \quad (۵۰)$$

که در حالت جمعی به صورت معادله (۵۱) است.

$$\begin{aligned} (I_N \otimes m_1)e(t) &= \tilde{X}(t) - \hat{\tilde{X}}(t) \\ \rightarrow \hat{\tilde{X}}(t) &= \tilde{X}(t) - (I_N \otimes m_1)e(t) \end{aligned} \quad (۵۱)$$

حال با جایگذاری معادله (۵۱) در دینامیک عدم توافق (۴۹) معادله (۵۲) بدست می آید.

$$\begin{aligned} (I_N \otimes E)\dot{\tilde{X}}(t) &= ((I_N \otimes A) \\ &- c((L+G) \otimes BK))\tilde{X}(t) \\ &+ c((L+G) \otimes BKm_1)e(t) \end{aligned} \quad (۵۲)$$

در ادامه با ترکیب سیستم کنترل حلقه بسته (۵۲) و دینامیک خطای تخمین رویتر (۲۲) رابطه (۵۳) حاصل می شود.

$$\begin{bmatrix} (I_N \otimes E) & 0_{Nn \times N(n+r)} \\ 0_{N(n+r) \times Nn} & (I_N \otimes \bar{E}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{X}}(t) \\ \dot{e}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} \\ 0 & \Theta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{X}(t) \\ e(t) \end{bmatrix} \quad (۵۳)$$

$$\begin{aligned} \Theta_{11} &= (I_N \otimes A) - c(L+G \otimes BK) \\ \Theta_{12} &= c(L+G \otimes BKm_1) \\ \Theta_{22} &= (I_N \otimes \bar{A}) - (L+G \otimes R\bar{C}) \end{aligned}$$

صفر ایجاد شده در معادله (۵۳) نشان می دهد که با انتخاب مناسب R به صورتی که سیستم (۲۲) پایدار باشد، می توان K را به صورت مستقل تعیین کرد. به این ترتیب، اصل جدایی پذیری اثبات شد و می توان با طراحی جداگانه رویتر و کنترل کننده هدف جمعی سیستم را تنها با استفاده از شرط رویتر پذیری نسبی و کنترل پذیری نسبی سیستم (۱) برآورده کرد.

۵. شبیه سازی

به منظور نشان دادن کارایی روش پیشنهاد شده برای تخمین عیب حسگر و کنترل تحمل پذیر عیب به منظور اجماع رهبر پیرو، دو مطالعه موردی ارائه می شود.

مثال (۱) سیستم چندعاملی سینگولار در رابطه (۱) با پارامترهای توصیف شده در معادله (۵۴) در نظر گرفته می شود.

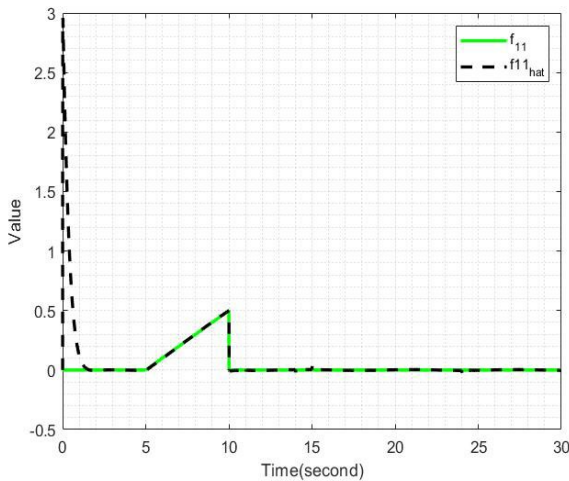
$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -3 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (۵۴)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

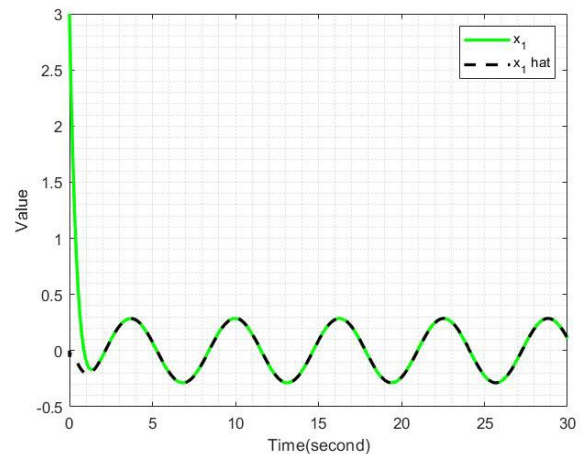
گراف تعاملی عامل ها به صورت شکل (۲) نشان داده می شود.

متغیرهای حالت و تخمین متغیرهای حالت عامل اول به

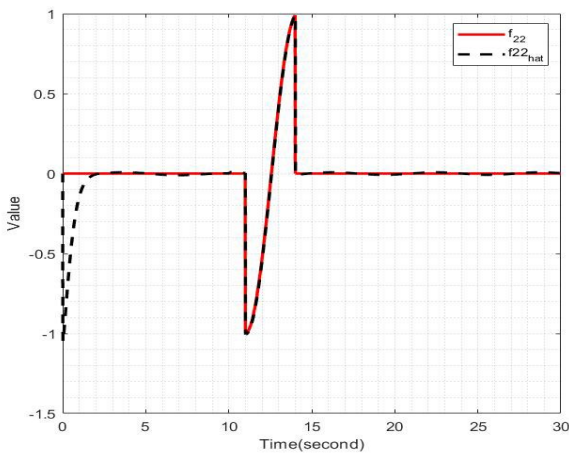
عنوان نمونه در شکل‌های (۳-۵) نشان داده شده است.



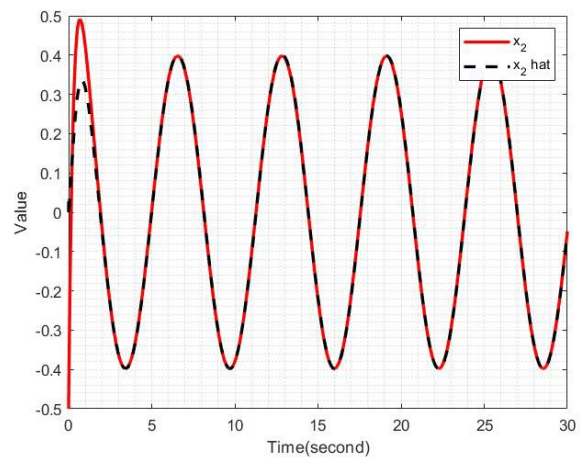
شکل ۶- عیب حسگر اول از عامل اول و تخمین آن.



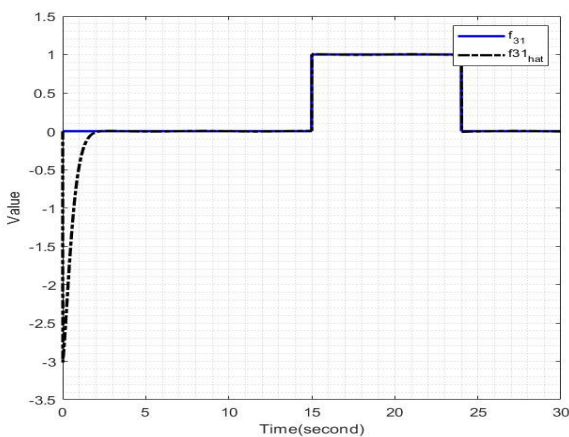
شکل ۳- متغیر حالت اول و تخمین آن (عامل اول).



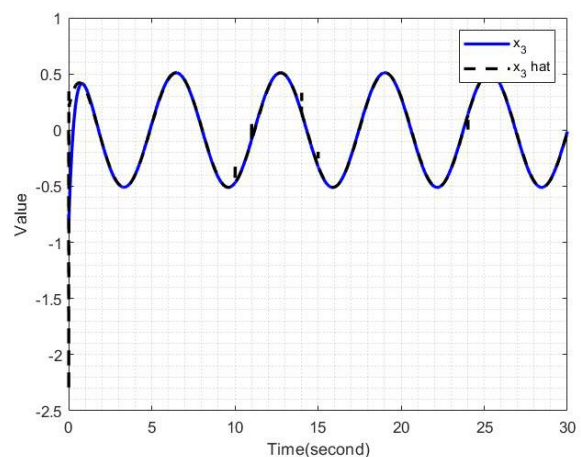
شکل ۷- عیب حسگر دوم از عامل دوم و تخمین آن.



شکل ۴- متغیر حالت دوم و تخمین آن (عامل اول).



شکل ۸- عیب حسگر اول از عامل سوم و تخمین آن.

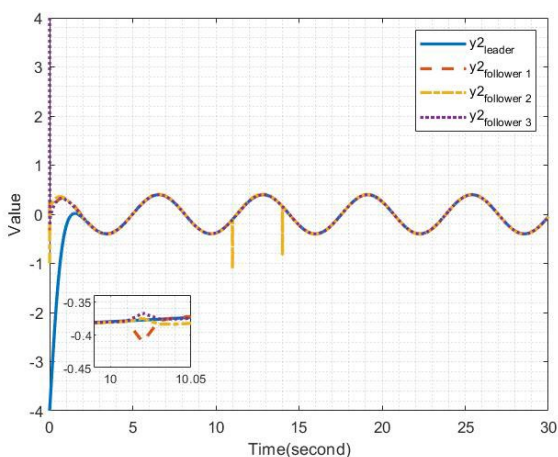


شکل ۵- متغیر حالت سوم و تخمین آن (عامل اول).

همان‌طور که مشاهده می‌شود، تخمین‌های انجام شده تا حد خوبی دقیق است. همین‌طور به دلیل استفاده از رویت گر توزیع شده، عیب حسگر در عامل‌های همسایه اثرگذار است.

همان‌طور که مشاهده می‌شود، تخمین حالات سیستم به خوبی انجام شده است. حال در شکل‌های (۶-۸) عیب حسگر به همراه تخمین آن‌ها نشان داده شده است.

خروجی سیستم به همراه عیب حسگر مربوط به هر عامل و خروجی سیستم با حذف اثر عیب حسگر با استفاده از تخمین انجام شده در شکل های (۹-۱۲) نشان داده شده است.



شکل ۱۲- خروجی دوم عامل ها با حذف اثر عیب حسگر.

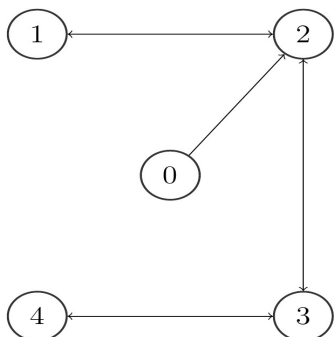
رفتارهای ضربه ای در شکل های (۱۰) و (۱۲) ناشی از وقوع ناگهانی عیب حسگر (ناپیوستگی عیب حسگر) و حالت گذرای رویت گر است.

مثال ۲) سیستم چندعاملی سینگولار در رابطه (۱) با پارامترهای توصیف شده در معادله (۵۹) در نظر گرفته می شود.

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -0.5 & -1 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0], \quad D_f = 1 \quad (59)$$

گراف تعاملی عامل ها به صورت شکل (۱۳) نشان داده می شود.

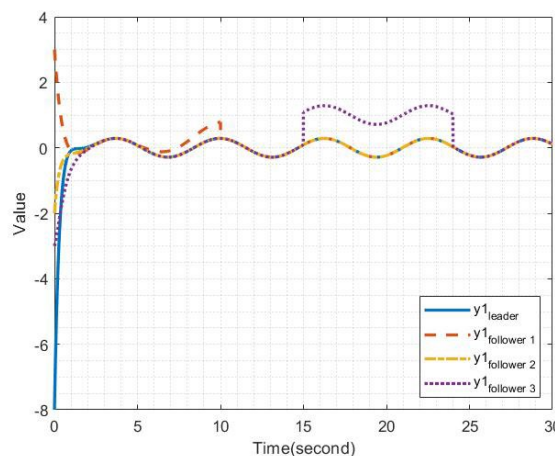


شکل ۱۳- گراف ارتباطی سیستم

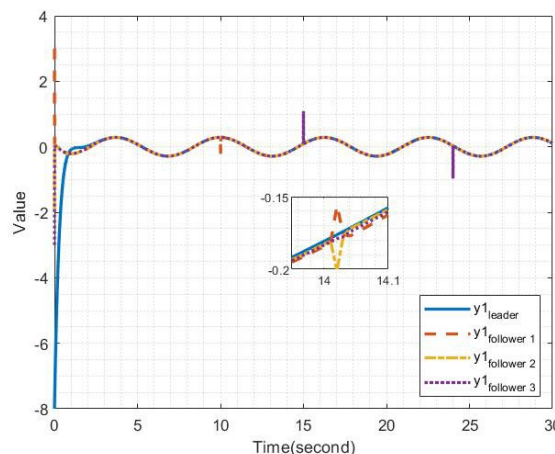
ماتریس L و G در آن به صورت معادله (۶۰) است.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (60)$$

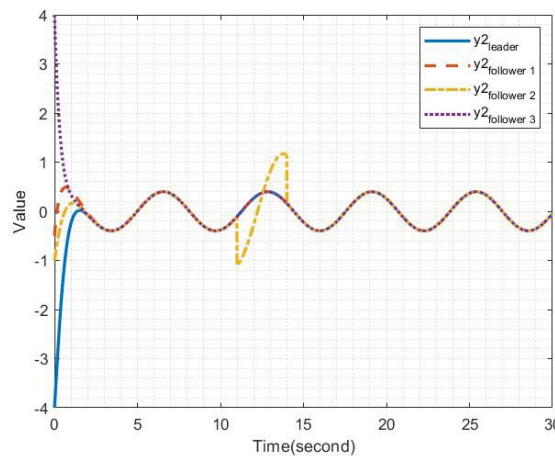
همچنین، عیب حسگر به صورت رابطه (۶۲) در نظر گرفته شده است. باید توجه داشت که منظور از f_{ij} عیب حسگر z در عامل i است.



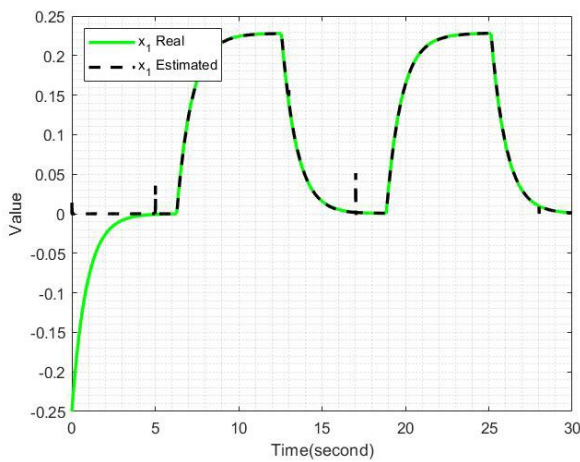
شکل ۹- خروجی اول عامل ها به همراه اثر عیب حسگر.



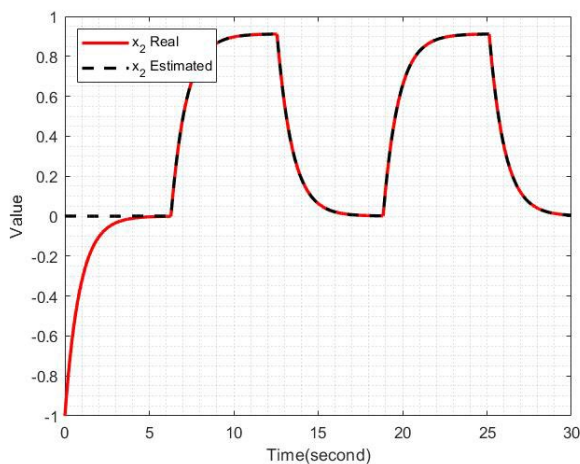
شکل ۱۰- خروجی اول عامل ها با حذف اثر عیب حسگر.



شکل ۱۱- خروجی دوم عامل ها به همراه اثر عیب حسگر.

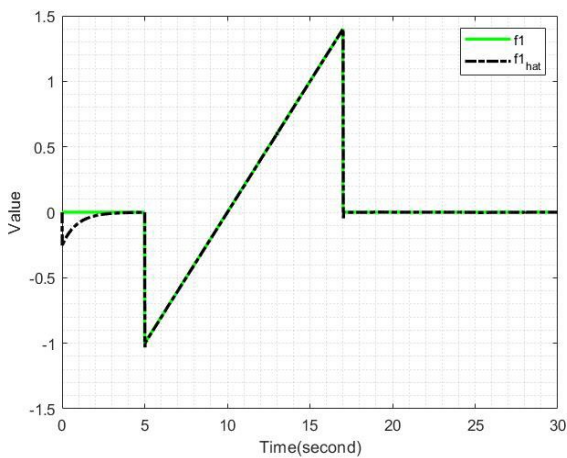


شکل ۱۵- متغیر حالت اول و تخمین آن (عامل اول).



شکل ۱۶- متغیر حالت دوم و تخمین آن (عامل اول).

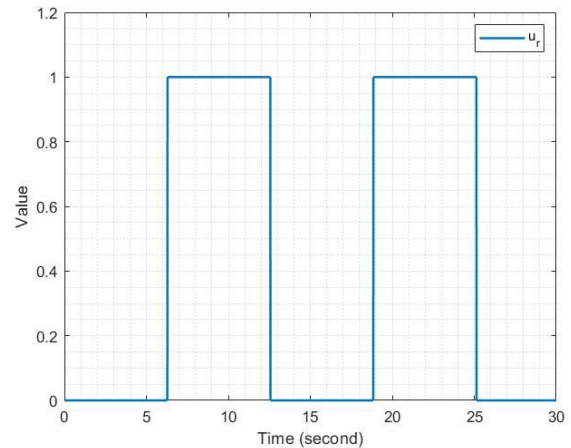
همان‌طور که مشاهده می‌شود، تخمین حالات سیستم به خوبی انجام شده‌است. حال در شکل‌های (۱۷-۲۰) به ترتیب عیب حسگر خروجی عامل‌های اول تا چهارم به همراه تخمین آن‌ها نشان داده شده‌است.



شکل ۱۷- عیب حسگر از عامل اول و تخمین آن.

$$\begin{cases} f_1(t) = 0.2t - 2 & 5 < t < 17 \\ f_1(t) = 0 & \text{O.W} \\ f_2(t) = \sin(t) & 13 < t < 28 \\ f_2(t) = 0 & \text{O.W} \\ f_3(t) = 0.7 & 15 < t < 24 \\ f_3(t) = 0 & \text{O.W} \\ f_4(t) = (0.1 \times t \times \sin(0.5t)) - 1.1 & 11 < t < 25 \\ f_4(t) = 0 & \text{O.W} \end{cases} \quad (62)$$

ورودی عامل رهبر نیز به صورت شکل (۱۴) در نظر گرفته می‌شود.



شکل ۱۴- ورودی عامل رهبر.

حال با طراحی رویت گر سینگولار توزیع شده، تخمین متغیرهای حالت و عیب حسگر به صورت هم‌زمان انجام می‌شود. با حل نامساوی خطی ماتریسی (۲۷)، ماتریس بهره رویت گر و ماتریس P بدست می‌آید که به صورت معادله (۶۳) است.

$$R = \begin{bmatrix} -0.2746 \\ -0.0489 \\ -0.0645 \end{bmatrix}$$

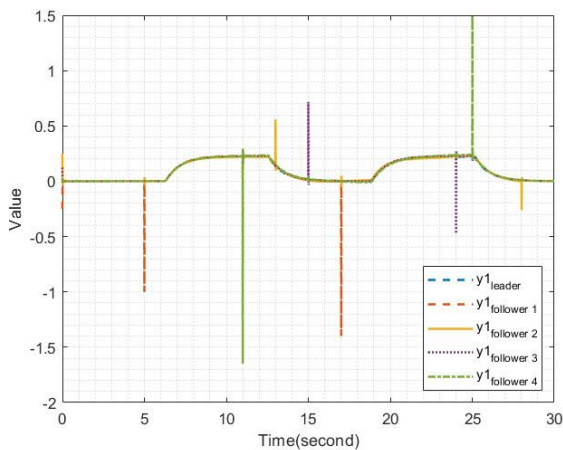
$$P = \begin{bmatrix} 0.9866 & 0 & -0.4429 \\ 0 & 2.8214 & 0 \\ -0.4429 & 0 & 2.9564 \end{bmatrix} \quad (63)$$

با حل نامساوی خطی ماتریسی (۴۰) ماتریس بهره کنترل کننده K و ماتریس Z به صورت معادله (۶۴) بدست می‌آید.

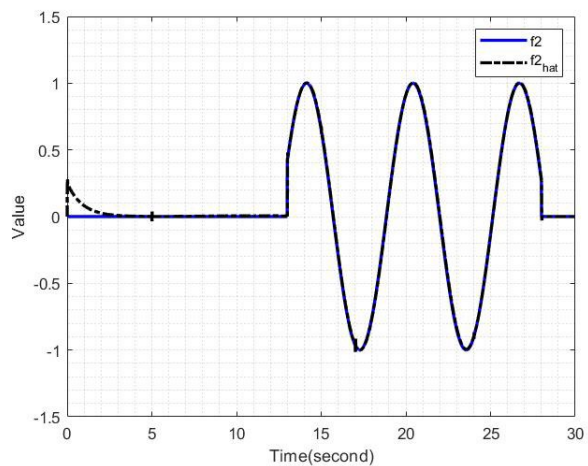
$$K = [0.0944 \quad 0.0049]$$

$$Z = \begin{bmatrix} 2.8903 & 0 \\ 0 & 8.6649 \end{bmatrix} \quad (64)$$

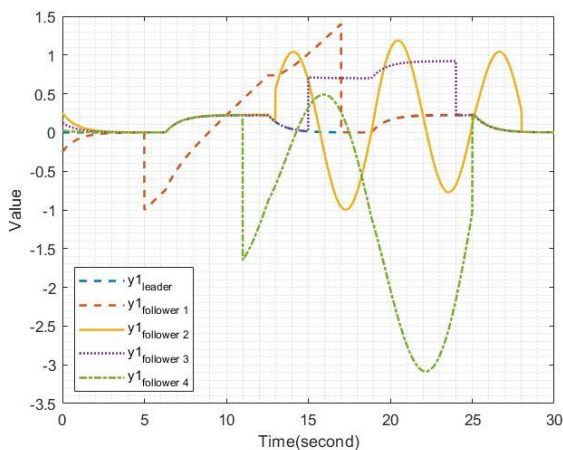
متغیرهای حالت و تخمین متغیرهای حالت عامل اول به عنوان نمونه در شکل‌های (۱۵) و (۱۶) نشان داده شده است.



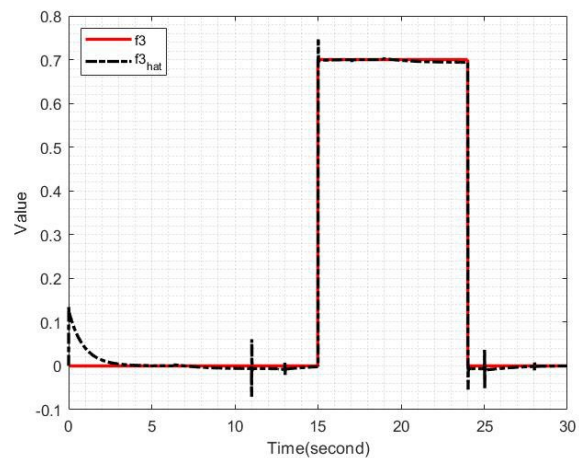
شکل ۲۱- خروجی عامل‌ها با حذف اثر عیب حسگر.



شکل ۱۸- عیب حسگر از عامل دوم و تخمین آن.



شکل ۲۲- خروجی عامل‌ها به همراه اثر عیب حسگر.

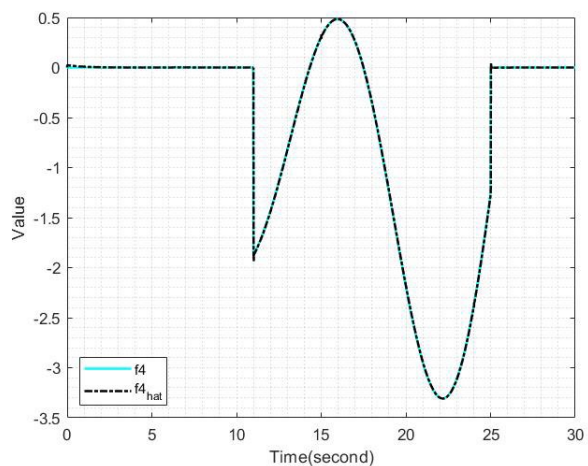


شکل ۱۹- عیب حسگر از عامل سوم و تخمین آن.

همان‌طور که در دو شکل اخیر هویداست، سیستم کنترل پیشنهادی در این مقاله به خوبی توانسته است اثر نامطلوب عیب سنسور بر عملکرد سیستم را کاهش دهد. شایان ذکر است، رفتارهای ضربه‌ای در شکل‌های (۲۱) ناشی از وقوع ناگهانی عیب حسگر (ناپیوستگی عیب حسگر) و حالت گذرای رویت‌گر است.

۶. نتیجه‌گیری

در این مقاله، کنترل تحمل‌پذیر عیب برای سیستم‌های چندعاملی سینگولار برای نیل به هدف اجماع رهبر-پیرو در حضور عیب حسگر مورد مطالعه قرار گرفت. ساختار سیستم کنترل در نظر گرفته شده به صورت مبتنی بر رویت‌گر سینگولار و با معماری توزیع‌شده در نظر گرفته شد. شرایط وجود چنین سیستم کنترل تحمل‌پذیر عیب بر حسب ترم‌های LMI که با استفاده از جعبه‌ابزار موجود در نرم‌افزار MATLAB قابل حل هستند؛ بیان شد. درنهایت، صحت و اعتبارسنجی روش پیشنهادی با ارائه‌ی یک مثال و شبیه‌سازی رایانه‌ای آن مورد بررسی قرار گرفت که نتایج حاصل نشان از کارایی مناسب روش پیشنهادی برای کنترل اجماع رهبر-پیرو سیستم‌های چندعاملی سینگولار در معرض عیب حسگر داشتند. توسعه‌ی روش پیشنهادی برای حالتی که در سیستم عیب



شکل ۲۰- عیب حسگر از عامل چهارم و تخمین آن.

همان‌طور که مشاهده می‌شود، تخمین‌های انجام شده دقیق هستند. همین‌طور به دلیل استفاده از رویت‌گر توزیع‌شده، عیب حسگر در عامل‌های همسایه اثرگذار است.

خروجی سیستم به همراه عیب حسگر مربوط به هر عامل و خروجی سیستم با حذف اثر عیب حسگر با استفاده از تخمین انجام‌شده به ترتیب در شکل‌های (۲۱) و (۲۲) نشان داده شده است.

- Nonlinear Control*, vol. 30, pp. 652-664, 2020.
- [12] R. V. Beard, "Failure accomodation in linear systems through self-reorganization," *Massachusetts Institute of Technology*, 1971.
- [13] Z. Gao and D. W. Ho, "State/noise estimator for descriptor systems with application to sensor fault diagnosis," *IEEE transactions on signal processing*, vol. 54, pp. 1316-1326, 2006.
- [14] M. Wang and T. Liang, "Adaptive Kalman filtering for sensor fault estimation and isolation of satellite attitude control based on descriptor systems," *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, vol. 41, pp. 1686-1698, 2019.
- [15] Y. Liu, Y. Ma, and Y. Wang, "Reliable finite-time sliding-mode control for singular time-delay system with sensor faults and randomly occurring nonlinearities," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 320, pp. 341-357, 2018.
- [16] A. H. Hassanabadi, M. Shafiee, and V. Puig, "Sensor fault diagnosis of singular delayed LPV systems with inexact parameters: an uncertain system approach," *International Journal of Systems Science*, vol. 49, pp. 179-195, 2018.
- [17] F. Pourdadashi Komachali and M. Shafiee, "Sensor fault diagnosis in fractional-order singular systems using unknown input observer," *International Journal of Systems Science*, vol. 51, pp. 116-132, 2020.
- [18] B. Rabaoui, H. Hamdi, N. BenHadj Braiek, and M. Rodrigues, "Descriptor observer - based sensor and actuator fault tolerant tracking control design for linear parameter varying systems," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 31, pp. 8329-8352, 2021.
- [19] L. Chen, Y. Zhao, S. Fu, M. Liu, and J. Qiu, "Fault estimation observer design for descriptor switched systems with actuator and sensor failures," *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, vol. 66, pp. 810-819, 2018.
- [20] H. K. Alaei and A. Yazdizadeh, "Robust output disturbance, actuator and sensor faults reconstruction using H_{∞} sliding mode descriptor observer for uncertain nonlinear boiler system," *International Journal of Control, Automation and Systems*, vol. 16, pp. 1271-1281, 2018.
- [21] C. Gao, Z. Wang, X. He, and H. Dong, "Fault-tolerant consensus control for multi-agent systems: An encryption-decryption scheme," *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2021.
- عملگر نیز وجود دارد در فعالیت‌های تحقیقاتی آتی مورد مطالعه قرار خواهد گرفت.
- مراجع
- [1] A. A. Belov, O. G. Andrianova, and A. P. Kurdyukov, "Control of discrete-time descriptor systems," *Cham: Springer International Publishing*, 2018.
- [2] P. Stechlinski, M. Patrascu, and P. I. Barton, "Nonsmooth differential-algebraic equations in chemical engineering," *Computers & Chemical Engineering*, vol. 114, pp. 52-68, 2018.
- [3] M. De la Sen, A. Ibeas, and S. Alonso-Quesada, "On the Reachability of a Feedback Controlled Leontief-Type Singular Model Involving Scheduled Production, Recycling and Non-Renewable Resources," *Mathematics*, vol. 9, p. 2175, 2021.
- [4] T. Kaczorek, "Singular fractional linear systems and electrical circuits," *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, Vol. 21, No. 2, 379-384, 2011.
- [5] I. Zamani, M. Shafiee, and A. Ibeas, "Switched nonlinear singular systems with time - delay: Stability analysis," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 25, pp. 1497-1513, 2015.
- [6] G.-R. Duan, *Analysis and design of descriptor linear systems* vol. 23: Springer Science & Business Media, 2010.
- [7] E. Arefinia, H. A. Talebi, and A. Doustmohammadi, "A robust adaptive observer for a class of singular nonlinear uncertain systems," *International Journal of Systems Science*, vol. 48, pp. 1404-1415, 2017.
- [8] M. Davoodi, N. Meskin, and K. Khorasani, "Simultaneous fault detection and consensus control design for a network of multi-agent systems," *Automatica*, vol. 66, pp. 185-194, 2016.
- [9] J. Xi, M. He, H. Liu, and J. Zheng, "Admissible output consensualization control for singular multi-agent systems with time delays," *Journal of the Franklin Institute*, vol. 353, pp. 4074-4090, 2016.
- [10] Y. Cong, Z. Feng, H. Song, and S. Wang, "Containment control of singular heterogeneous multi-agent systems," *Journal of the Franklin Institute*, vol. 355, pp. 4629-4643, 2018.
- [11] X. Liu, Y. Xie, F. Li, P. Shi, W. Gui, and W. Li, "Formation control of singular multiagent systems with switching topologies," *International Journal of Robust and*

- [28] X. Zhang, J. Dong, and L. Li, "Fault-Tolerant Consensus of Fractional Order Singular Multi-Agent Systems With Uncertainty," *Ieee Access*, vol. 8, pp. 68762-68771, 2020.
- [29] H. Fan, K. Zheng, L. Liu, B. Wang, and W. Wang, "Event-triggered finite-time consensus of second-order leader-follower multiagent systems with uncertain disturbances," *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2020.
- [30] L. Dai, *Singular control systems*: Springer, 1989.
- [31] W. Ren and R. W. Beard, *Distributed consensus in multi-vehicle cooperative control* vol. 27: Springer, 2008.
- [32] J. Y. Ishihara and M. H. Terra, "On the Lyapunov theorem for singular systems," *IEEE transactions on Automatic Control*, vol. 47, pp. 1926-1930, 2002.
- [22] L. Qin, X. He, and D. Zhou, "Fault-tolerant cooperative output regulation for multi-vehicle systems with sensor faults," *International Journal of Control*, vol. 90, pp. 2227-2248, 2017.
- [23] Y. Sun, Y. Xia, J. Zhang, and D.-W. Ding, "Adaptive fault-tolerant output regulation of linear multi-agent systems with sensor faults," *IEEE Access*, vol. 8, pp. 159440-159448, 2020.
- [24] M. Gao, S. Yang, and L. Sheng, "Distributed fault estimation for time-varying multi-agent systems with sensor faults and partially decoupled disturbances," *IEEE Access*, vol. 7, pp. 147905-147913, 2019.
- [25] K. Zhang, B. Jiang, X. Yan, and J. Xia, "Distributed fault diagnosis of multi-agent systems with time-varying sensor faults," *ICIC Express Letters*, vol. 14, pp. 129-135, 2020.
- [26] E. Mousavinejad, X. Ge, Q.-L. Han, T. J. Lim, and L. Vlacic, "An Ellipsoidal Set-Membership Approach to Distributed Joint State and Sensor Fault Estimation of Autonomous Ground Vehicles," *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, vol. 8, pp. 1107-1118, 2021.
- [27] W. Shi, W. Chen, L. Gao, and J. Hu, "Adaptive fault-tolerant tracking control for singular multi-agent systems," in *2017 11th Asian Control Conference (ASCC)*, 2017, pp. 2358-2363.